Раздел 2. Тема 6. Занятие 2

Класс: №№ 4422.1, 4441, 4443, 4454, 4455.1, 4457.

№4422.1 Найти дивергенцию поля $a = \frac{-ix+jy+kz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в точке $M(3;4;5)$. Чему приближенно равен поток Π вектора a через бесконечно малую сферу $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=\varepsilon^2$.

$$a_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad a_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad a_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \operatorname{div} a(M) = \frac{18}{125}.$$

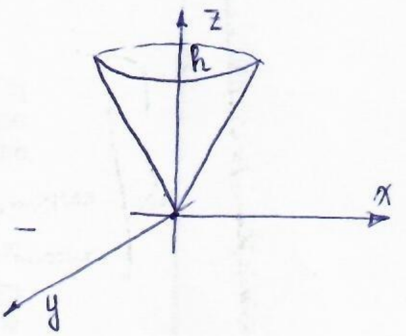
$$\Pi = \oiint_S a_n\,dS = \iiint_V \operatorname{div} a\,dxdydz \approx \operatorname{div} a(M)\cdot\iiint_V dxdydz = \operatorname{div} a(M)\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 =$$

$$= \frac{24}{125}\pi\varepsilon^3 \Rightarrow \Pi = \frac{24}{125}\pi\varepsilon^3$$

№4441. Найти поток вектора r

(а) через боковую поверхность конуса $x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le h$

(б) через основание этого конуса.



(а) $$\Pi = \iint_{S_{б.п}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iint_{S_{б.п.}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS + \iint_{S_{осн.}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS -$$

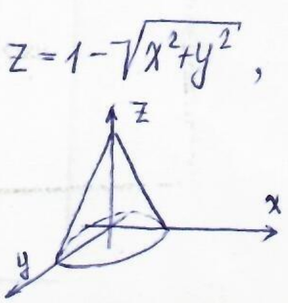
$$- \iint_{S_{осн.}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \oiint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS - \iint_{S_{осн.}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$$

$$= \iiint_V \operatorname{div} r\,dxdydz - \iint_{S_{осн}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \left| \begin{matrix}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = 0\\ \cos\gamma = 1\end{matrix},\ z = h \right| =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot h - h\iint_{S_{осн}} dS = \pi h^3 - \pi h^3 = 0 \Rightarrow \Pi = 0$$

(б) $$\Pi = \iint_{S_{осн}} r\,dS = \pi h^3.$$

№4443 Найти поток радиус-вектора r через поверхность $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$.



$$\Pi = \iint_S r_n\,dS = \iint_S r_n\,dS + \iint_{S_{осн}} r_n\,dS - \iint_{S_{осн}} r_n\,dS =$$

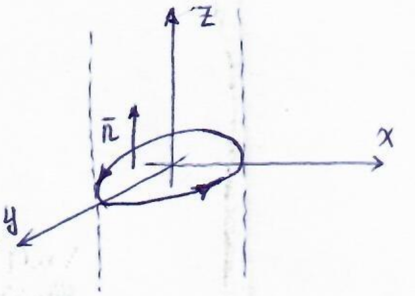
$$= \oint\!\!\!\oint_S r_n ds - \iint_{S_{осн}} r_n ds = \iiint_V div\, r\, dxdydz - \iint_{S_{осн}} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) ds =$$

$$= \left| \begin{matrix} z=0 \\ x^2+y^2\le 1 \end{matrix},\ \begin{matrix} \cos\alpha=0 \\ \cos\beta=0 \\ \cos\gamma=-1 \end{matrix} \right| = 3\iiint_V dxdydz + 0 = 3\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 1 = \pi. \Rightarrow П = \pi.$$

№4454 Найти циркуляцию вектора $a = -yi + xj + ck$, $c = Const$

ⓐ вдоль окружности $x^2+y^2=1,\ z=0$

ⓑ вдоль окружности $(x-2)^2+y^2=1,\ z=0$.



ⓐ $$\Gamma = \oint_C a\,dr = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & c \end{vmatrix} ds =$$

$$= \iint_S \left\{ \cos\alpha \cancel{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & c \end{vmatrix}}^{\,0} - \cos\beta \cancel{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & c \end{vmatrix}}^{\,0} + \cos\gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} \right\} ds$$

$$= 2\iint_S \cos\gamma\, ds = |\cos\gamma = 1| = 2\iint_S ds = 2\pi \Rightarrow \Gamma = 2\pi.$$

ⓑ Все рассуждения аналогичны.

№4455.1 Дано векторное поле $a = \frac{y}{\sqrt{z}} i - \frac{x}{\sqrt{z}} j + \sqrt{xy}\, k$.

Вычислив rot a в точке $M(1;1;1)$ приближенно найти циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = \varepsilon^2$$

$$(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0,\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1.$$

$$a_x = \frac{y}{\sqrt{z}},\ a_y = -\frac{x}{\sqrt{z}},\ a_z = \sqrt{xy}$$

$$rot\, a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{x}{\sqrt{z^3}}\right) i - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{\sqrt{z^3}}\right) j - \frac{2}{\sqrt{z}} k$$

$$rot\, a(M) = -j - 2k \Rightarrow$$

$$\Gamma = \oint_C a\,dr = \iint_S (rot\, a)_n ds \approx (rot\, a)_n(M) \iint_S ds = (rot\, a(M), \bar{n}) \iint_S ds =$$

$$= -(\cos\beta + 2\cos\gamma)\pi\varepsilon^2 = -\pi(\cos\beta + 2\cos\gamma)\varepsilon^2 \Rightarrow \Gamma \approx -\pi(\cos\beta + 2\cos\gamma)\varepsilon^2.$$

№4457 Показать, что поле $a = yz(2x+y+z)i + xz(x+2y+z)j + xy(x+y+2z)k$ потенциальное и найти потенциал этого поля.

$$a_x = yz(2x+y+z),\ a_y = xz(x+2y+z),\ a_z = xy(x+y+2z) \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot} a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) k = 0.$$

поле потенциальное.

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} a_x(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} a_y(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} a_z(x_0,y_0,z)\,dz + C_* =$$

$$= \int_{x_0}^{x} (2xyz + y^2 z + yz^2)\,dx + \int_{y_0}^{y} (x_0^2 z + 2x_0 yz + x_0 z^2)\,dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} (x_0^2 y_0 + x_0 y_0^2 + 2x_0 y_0 z)\,dz + C_* = xyz(x+y+z) + C \Rightarrow$$

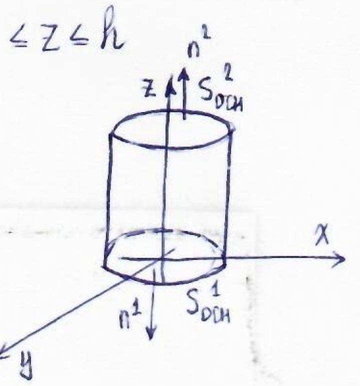
$$u(x,y,z) = xyz(x+y+z) + C.$$

Дома: №№ 4442, 4444, 4447, 4455, 4457.1.

№4442 Найти поток вектора $a = yz\,i + xz\,j + xy\,k$

ⓐ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$

ⓑ через полную поверхность этого цилиндра.



ⓐ $$\Pi = \iint\limits_{S_{б.п}} a_n\,dS = \iint\limits_{S_{б.п}} a_n\,dS + \iint\limits_{S_{осн}} a_n\,dS - \iint\limits_{S_{осн}} a_n\,dS =$$

$$= \oiint\limits_{S} a_n\,dS - \iint\limits_{S_{осн}} a_n\,dS = I_1 - I_2 .$$

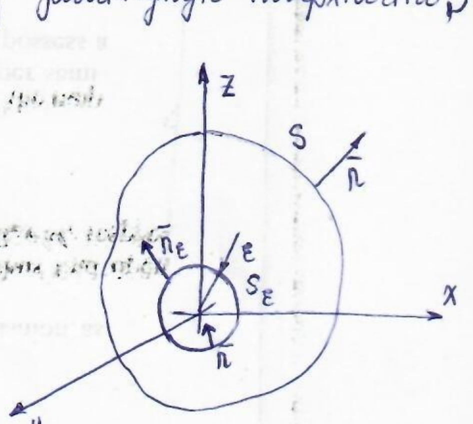
$$I_1 = \oiint\limits_{S} a_n\,dS = \iiint\limits_{V} div\, a\, dx\,dy\,dz \equiv 0$$

$$I_2 = \iint\limits_{S_{осн}} a_n\,dS = \iint\limits_{S^1_{осн}} a_n\,dS + \iint\limits_{S^2_{осн}} a_n\,dS = \left| \left.\begin{matrix}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = 0\\ \cos\gamma = -1\end{matrix}\right] : n^1, \quad \left.\begin{matrix}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = 0\\ \cos\gamma = 1\end{matrix}\right] : n^2 \right| =$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} xy\,dx\,dy + \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} xy\,dx\,dy \equiv 0 \Rightarrow \Pi = 0 .$$

ⓑ $$\Pi = \oiint\limits_{S} a_n\,dS = \iiint\limits_{V} div\, a\, dx\,dy\,dz = 0 \Rightarrow \Pi = 0 .$$

№4447. Найти поток вектора $a = \frac{m\,r}{|r|^3}$, $m = Const$ через замкнутую поверхность S, окружающую начало координат.



$$\Pi = \iint\limits_{S} a_n\,dS = \iint\limits_{S} a_n\,dS + \iint\limits_{S_\varepsilon} a_n\,dS - \iint\limits_{S_\varepsilon} a_n\,dS =$$

$$= \oiint\limits_{S \cup S_\varepsilon} a_n\,dS + \iint\limits_{S_\varepsilon} a_{n_\varepsilon}\,dS = \iiint\limits_{V} div\, a\, dx\,dy\,dz +$$

$$+ \iint\limits_{S_\varepsilon} a_{n_\varepsilon}\,dS = I_1 + I_2 .$$

$$a_x = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad a_y = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad a_z = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3};$$

Величины $\frac{\partial a_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial a_z}{\partial z}$ вычисляются аналогично $\Rightarrow$

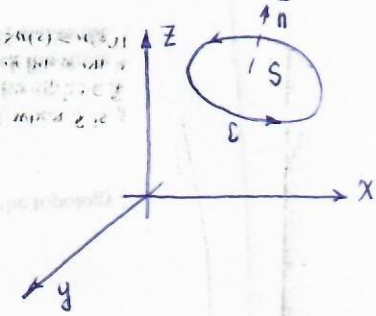
$$\operatorname{div} a = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\left\{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right\} = 0. \Rightarrow I_1 = 0.$$

$$I_2 = m\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{1}{|r|^3}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \left|\begin{array}{l}\cos\alpha = \frac{x}{\varepsilon}\\ \cos\beta = \frac{y}{\varepsilon}\\ \cos\gamma = \frac{z}{\varepsilon}\end{array}\right| = \frac{m}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_\varepsilon}\left(\frac{x^2}{\varepsilon} + \frac{y^2}{\varepsilon} + \frac{z^2}{\varepsilon}\right)dS =$$

$$= \frac{m}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_\varepsilon} dS = \frac{m}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi m. \Rightarrow \Pi = 4\pi m.$$

№4455. Найти циркуляцию Γ вектора $a = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$ вдоль контура C в двух случаях:

ⓐ C не окружает ось OZ; ⓑ C окружает ось OZ.



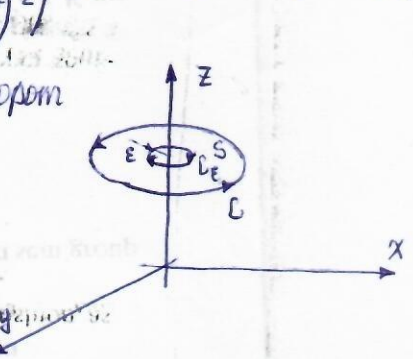
ⓐ $$a_x = -\frac{y}{x^2+y^2},\quad a_y = \frac{x}{x^2+y^2},\quad a_z = 0.$$

$$\Gamma = \oint\limits_C a\,dr = \iint\limits_S (\operatorname{rot} a)_n\,dS =$$

$$= \iint\limits_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} dS = \iint\limits_S\left\{\cos\alpha\,\cancel{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)}^{0} - \cos\beta\,\cancel{\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)}^{0} + \right.$$

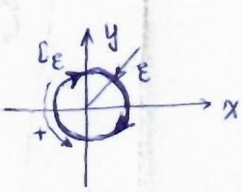
$$\left. + \cos\gamma\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\right\}dS = \iint\limits_S \cos\gamma\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dS = 0 \Rightarrow \Gamma = 0.$$

ⓑ Считаем, что контур C делает только один оборот вокруг оси OZ.



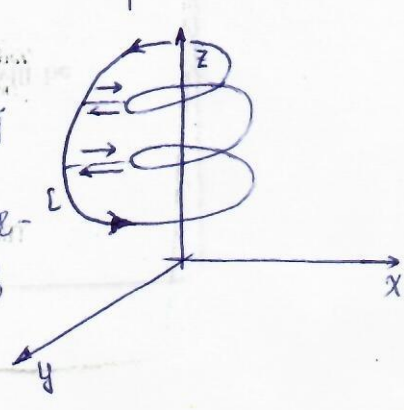
$$\Gamma = \oint\limits_C a\,dr = \oint\limits_C a\,dr + \oint\limits_{C_\varepsilon} a\,dr - \oint\limits_{C_\varepsilon} a\,dr =$$

$$= \oint\limits_{C\cup C_\varepsilon} a\,dr + \oint\limits_{C_\varepsilon} a\,dr = \iint\limits_S (\operatorname{rot} a)_n\,dS + \oint\limits_{C_\varepsilon^+} a\,dr =$$



$$= \left/\begin{array}{lll} x = \varepsilon\cos\varphi, & x'_\varphi = -\varepsilon\sin\varphi & \\ y = \varepsilon\sin\varphi, & y'_\varphi = \varepsilon\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = C = \mathrm{const} & z'_\varphi = 0 & \end{array}\right/ =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left\{-\frac{\varepsilon\sin\varphi}{\varepsilon^2}(-\varepsilon\sin\varphi) + \frac{\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon\cos\varphi\right\}d\varphi = 2\pi \Rightarrow \Gamma = 2\pi$$



Для большего числа оборотов (см. рисунок) все рассуждения аналогичны и $\Gamma = 2\pi m$, где m – число оборотов вокруг оси OZ.

№ 4457.1 Убедившись в потенциальности поля

$$a = \frac{2}{(y+z)^{1/2}} i - \frac{x}{(y+z)^{3/2}} j - \frac{x}{(y+z)^{3/2}} k$$

найти работу поля вдоль пути, соединяющего в положительном октанте точки $M(1;1;3)$ и $N(2;4;5)$.

$$a_x = \frac{2}{(y+z)^{1/2}}, \quad a_y = -\frac{x}{(y+z)^{3/2}}, \quad a_z = -\frac{x}{(y+z)^{3/2}} \Rightarrow$$

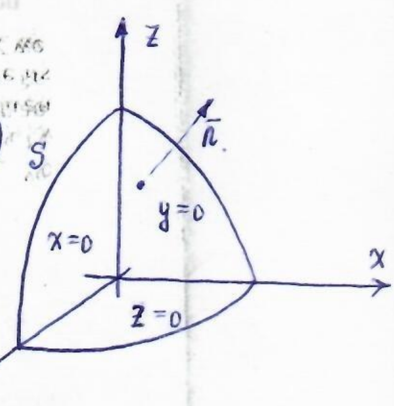
$$\operatorname{rot} a = \left(\frac{3}{2}x(y+z)^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x(y+z)^{-\frac{5}{2}}\right) i - \left(-\frac{1}{(y+z)^{3/2}} + \frac{1}{(y+z)^{3/2}}\right) j + \left(-\frac{1}{(y+z)^{3/2}} + \frac{1}{(y+z)^{3/2}}\right) \times$$

$$\times k \equiv 0 \Rightarrow \text{поле } a \text{ потенциально}$$

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \frac{2}{(y+z)^{1/2}} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x_0}{(y+z)^{3/2}} dy - \int_{z_0}^{z} \frac{x_0}{(y_0+z)^{3/2}} dz + C_* =$$

$$= \frac{2x}{(y+z)^{1/2}} + C \Rightarrow \int_{MN} a\,dr = u(2;4;5) - u(1;1;3) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

№ 4444 Найти поток вектора $a = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ через положительный октант сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.



$$\Pi = \iint_S a_n dS = \oiint_S a_n dS - \iint_{x=0} a_n dS - \iint_{y=0} a_n dS - \iint_{z=0} a_n dS = (*)$$

$$\iint_{x=0} a_n dS = \left| \begin{matrix} \cos\alpha = -1 \\ \cos\beta = 0 \\ \cos\gamma = 0 \end{matrix}, x=0 \right| = \iint_{x=0} 0\, dS = 0$$

$$\iint_{y=0} a_n dS = \left| \begin{matrix} \cos\alpha = 0 \\ \cos\beta = -1 \\ \cos\gamma = 0 \end{matrix}, y=0 \right| = \iint_{y=0} 0\, dS = 0$$

$$\iint_{z=0} a_n dS = \left| \begin{matrix} \cos\alpha = 0 \\ \cos\beta = 0 \\ \cos\gamma = -1 \end{matrix}, z=0 \right| = \iint_{z=0} 0\, dS = 0$$

$$\oiint_S a_n dS = \iiint_{V_1} \operatorname{div} a\, dxdydz = 2\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz = \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi\cos\psi, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ y = r\sin\varphi\cos\psi, & 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ z = r\sin\psi, & 0 \leq r \leq 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0 r^2\cos\psi(r\cos\varphi\cos\psi + r\sin\varphi\cos\psi + r\sin\psi)\,dr = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{\pi}{3} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sin\psi\, d\psi = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\sin\psi\, d\psi = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\psi)\,d\psi + \frac{\pi}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\psi\, d\psi =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin 2\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{12}\cos 2\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}(-1-1) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Pi = \frac{\pi}{2}.$$

$$= \frac{1}{2}\overbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi}^{1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{1}{2}\overbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi}^{1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\psi \sin\psi\, d\psi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi\, d\psi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi\, d\psi + \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi\, d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\overset{0}{\cancel{\cos 2\psi}}}{2}\, d\psi + \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\, d(\sin\psi) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sin^2\psi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$